

Produit de convolution

Exercice 1 :

- a) Montrer qu'un singleton $\{a\}$ de $\mathbb{R}$ est un ensemble négligeable.
 - b) Même question avec un ensemble fini de points de $\mathbb{R}$.
 - c) Même question avec une partie dénombrable de $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{Q}$ est-il de mesure nulle ?

Je fixe $\varepsilon > 0$.

(i) Il suffit de poser l'intervalle $I_1 =]a - \frac{\varepsilon}{2}; a + \frac{\varepsilon}{2}[$; A lui tout seul, il forme une famille finie d'intervalle ouvert qui contient le singleton et de longueur égale à ε ce qui prouve que $\{a\}$ est un ensemble négligeable.

(ii) Prenons $E = \{a_1, \dots, a_n\}$ une famille finie de réels, pour chaque entier k entre 1 et n on pose $I_k =]a - \frac{\varepsilon}{2n}; a + \frac{\varepsilon}{2n}[$, chacun de ces intervalles a une longueur de $\frac{\varepsilon}{n}$ ce qui fait que la famille recouvre E tout en ayant une longueur totale inférieure ou égale à ε .

(iii) Si E est cette fois dénombrable, on peut écrire $E = \{a_k ; k \in \mathbb{N}^*\}$; posons cette fois pour chaque entier naturel k non nul $I_k =]a - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}; a + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}[$, la longueur d'un intervalle indexé par k vaut $\frac{\varepsilon}{2^k}$, or c'est le terme général d'une série numérique convergente de valeur ε puisque

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = 1$$
 (série géométrique de premier terme $1/2$), ainsi on a construit une famille d'intervalles qui recouvre E d'une part et dont la somme des longueurs est inférieure ou égale à ε d'autre part ce qui prouve qu'un ensemble dénombrable est un ensemble négligeable. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, il en résulte que $\mathbb{Q}$ est négligeable.