Transformée de Fourier, exercice 6

Soit $f(x) = e^{-ax^2}$, avec $a > 0$.
(i) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par f ?
(ii) En déduire l'expression de $\mathcal{F}f(\nu)$.
On rappelle que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *(intégrale de Gauss)*

(i) Pour tout réel x on a $f'(x) = -2axe^{-ax^2} = -2axf(x)$ d'où l'équation différentielle vérifiée par f sur $\mathbb{R}$:

$$(E) \quad f'(x) + 2axf(x) = 0$$

(ii) Transformons l'équation avec $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}(f'(x) + 2axf(x))(\nu) = \mathcal{F}(0)(\nu) = 0$$

Par linéarité de $\mathcal{F}$ on récupère :

$$\mathcal{F}f'(\nu) + 2a\mathcal{F}(xf)(\nu) = 0$$

Or $\mathcal{F}f'(\nu) = 2i\pi\nu\mathcal{F}f(\nu)$ (propriété de dérivation selon x) et $\mathcal{F}(xf)(\nu) = \dfrac{-1}{2i\pi}(\mathcal{F}(f))'(\nu) = 0$ (propriété de dérivation selon ν). Nommons $y(\nu) = \mathcal{F}f(\nu)$, on récupère l'équation :

$$\frac{-a}{i\pi}y'(\nu) + 2i\pi\nu y = 0$$

qui se reformule de façon équivalente en :

$$y'(\nu) + \frac{2\pi^2}{a}\nu y(\nu) = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, elle se résout immédiatement en :

$$y(\nu) = \lambda e^{\frac{-\pi^2\nu^2}{a}} = \mathcal{F}f(\nu)$$

Pour calculer λ il suffit de s'intéresser à une valeur particulière, comme $\mathcal{F}f(0)$ par exemple :

$$\lambda = \mathcal{F}f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}dt \underset{x=\sqrt{a}t}{=} \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

On vient donc de calculer, $\mathcal{F}f(\nu) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-\frac{\pi^2}{a}\nu}$