Convolution

Exercice 3

La fonction Π apparaissant ci-dessous est la fonction porte, à connaître :

$$\Pi(t) = 1 \text{ si } \frac{-1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \text{ et } \Pi(t) = 0 \text{ si } |t| > \frac{1}{2}$$

Calculer :
a) $H(t)\sin t * H(t)\cos t$ b) $H(t)e^t * H(t)e^t$ c) $\Lambda = \Pi * \Pi$

a) Les fonction $H\sin$ et $H\cos$ sont causales et continues par morceaux, on en déduit (pté du cours) que leur produit de convolution sera une fonction causale définie partout et aussi :

$$(H\sin * H\cos)(x) = H(x)\int_0^x \sin t\cos(x-t)dt$$

Comme $\sin t\cos(x-t) = \frac{1}{2}(\sin x + \sin(2t-x))$ on intègre ensuite facilement selon la variable t et on trouve :

$$(H\sin * H\cos)(x) = H(x)\frac{x\sin x}{2}$$

b) La fonction $Hexp$ étant continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et causale, son produit de convolution avec elle même sera une fonction causale et définie partout. On trouve :

$$(Hexp * Hexp)(x) = H(x)\int_0^x e^t e^{x-t}dt = H(x)\int_0^x e^x dt = H(x)xe^x$$

c) Remarquons d'abord que Π est une fonction de carré sommable sur $\mathbb{R}$ puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\Pi(t)|^2 dt = \int_{-1/2}^{+1/2} dt = 1$, du coup son produit de convolution avec elle-même sera une fonction définie partout, continue et bornée sur $\mathbb{R}$. par ailleurs :

$$\pi * \pi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t)\Pi(x-t)dt = \int_{-1/2}^{+1/2} \pi(x-t)dt = \int_{x-1/2}^{x+1/2} \Pi(t)dt$$

Quand x est fixé plus petit que -1, on aura $x+1/2$ plus petit que -1/2 et l'intégrande sera nulle ce qui donnera $\Pi * \Pi(x) = 0$. De même quand $x > 1$, l'intégrande sera nulle et on aura encore $\Pi * \Pi(x) = 0$.
Pour $x \in [-1;0]$, on aura l'intégrande qui sera nulle entre $x - 1/2$ et -1/2 et qui vaudra 1 ailleurs, on en déduit $\Pi * \Pi(x) = x + 1$ pour ces x là.
Enfin pour $x \in [0,1]$, l'intégrande vaut 1 jusqu'à 1/2 et 0 ensuite, ce qui donne $\Pi * \Pi(x) = 1 - x$ pour ces x là.
Pour conclure, $\Pi * \Pi(x) = 0$ quand $x \notin [-1;1]$, elle vaut $x+1$ quand $x \in [-1,0]$ et elle vaut $1 - x$ quand $x \in [0,1]$, si vous faites son graphe, vous comprendrez pourquoi on la nomme Λ