Transformée de Fourier, exercices 7, 8, 9 et 10

Exercice 7

Pour toutes les fonctions qui suivent, justifier sans calculs que $f * g$ est définie, continue sur $\mathbb{R}$ et sommable. Calculer $\mathcal{F}(f * g)$ et en déduire l'expression de $f(t) * g(t)$

a) $f(t) = \dfrac{1}{t^2 + a^2}$, $g(t) = \dfrac{1}{t^2 + b^2}$, a et b réels strictement positifs.

b) $f(t) = e^{-at^2} \quad a > 0$ et $g(t) = e^{-bt^2} \quad b > 0$

a) Les fonctions f et g sont de carré sommable, c'est pourquoi $f * g$ est une fonction définie partout, continue et bornée. Par ailleurs, f et g sont aussi sommables ce qui implique que $f * g$ est sommable.

$$\mathcal{F}(f * g)(\nu) = \mathcal{F}f\mathcal{F}g(\nu) = \frac{\pi^2}{ab} e^{-2\pi(a+b)|\nu|} = \frac{(a+b)\pi}{ab} \frac{\pi}{a+b} e^{-2\pi(a+b)|\nu|}$$

On reconnait la transformée de Fourier de la fonction $\dfrac{(a+b)\pi}{ab} \dfrac{1}{(a+b)^2 + t^2}$, comme $f * g$ est continue, il va y avoir égalité sur $\mathbb{R}$:

$$f * g(t) = \frac{(a+b)\pi}{ab} \frac{1}{(a+b)^2 + t^2}$$

b) Comme dans la question précédente, Les fonctions f et g sont de carré sommable, c'est pourquoi $f * g$ est une fonction définie partout, continue et bornée. Par ailleurs, f et g sont aussi sommables ce qui implique que $f * g$ est sommable.
On calcule :

$$\mathcal{F}(f * g)(\nu) = \mathcal{F}f\mathcal{F}g(\nu) = \frac{\pi}{\sqrt{ab}} e^{-\pi^2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\nu^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} \sqrt{\frac{\pi(a+b)}{ab}} e^{-\pi^2\nu^2\frac{a+b}{ab}}$$

On reconnait la transformée de Fourier de la fonction $\sqrt{\dfrac{\pi}{a+b}} e^{\frac{-ab}{a+b}t^2}$ et comme $f * g$ est continue il y a égalité.

Exercice 8

Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^n dx$ pour $n = 4$, puis $n = 2$ et enfin $n = 3$.

$$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^4 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}\Lambda(\nu))^2 d\nu$$

Comme Λ et $\mathcal{F}\Lambda$ sont sommables, on peut appliquer Parseval, on trouve ainsi :

$$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\Lambda(x))^2 dx = \int_{-1}^{1} \Lambda^2(x) dx = 2/3$$

Pour $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}\Pi(\nu))^2 d\nu$ on ne peut pas utiliser Parseval puisque $\mathcal{F}\Pi$ n'est pas sommable, par contre on peut utiliser le corollaire suivant :

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\Lambda(x) dx = \Lambda(0) = 1$$

On procède de même pour I_3 :

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^3 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\Pi \times \mathcal{F}\Lambda(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\Pi * \Lambda(x) dx = \Pi * \Lambda(0) = 3/4$$

Exercice 9

A l'aide de la transformation de Fourier trouver une solution particulière non triviale de l'équation différentielle :

$$y'' + 2\pi t y' + 4\pi y = 0$$

On applique la transformée de Fourier sur l'équation en enchainant la linéarité, les propriétés de dérivation selon t et de dérivation selon ν. En nommant $Y = \mathcal{F}y$ on aboutit à l'équation :

$$\nu Y'(\nu) + (2\pi\nu^2 - 1)Y(\nu) = 0$$

qui se résout en $Y(\nu) = K\nu e^{-\pi\nu^2} = \dfrac{1}{2i\pi} 2i\pi\nu e^{-\pi\nu^2}$.

On reconnait alors la transformée de $\dfrac{1}{2i\pi}\left(e^{-\pi t^2}\right)' = \dfrac{-t}{i} e^{-\pi t^2}$

Il suffit alors de tester la fonction $y(t) = te^{-\pi t^2}$ pour voir qu'on a trouvé une solution particulière.

Exercice 10

Résoudre l'équation intégrale ci-dessous où f est la fonction inconnue :

$$f(x) = e^{-3|x|} + \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-3|x-u|} \, du$$

On applique la transformée de Fourier sur l'équation, il suffit de remarque que l'intégrale est un produit de convolution entre f et la fonction $e^{-3|x|}$, on trouve alors facilement $\mathcal{F}f = \dfrac{6}{3 + 4\pi^2\nu^2}$. Avec un petit effort, on reconnait la transformée de $\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}|t|}$, si l'on suppose que la fonction cherchée est continue et sommable, alors c'est la formule qu'on vient de trouver !