Transformée de Fourier, exercice 5

Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

a) $x\Pi(x)$ b) $\Lambda = \Pi * \Pi$ c) $x\Lambda(x)$ d) $te^{-t}H(t)$
e) $\dfrac{1}{t^2+2at+b^2}$ $a^2 < b^2$ f) e^{-at^2+bt} $a > 0$ g) $\dfrac{1}{t+i}$
h) Π_T définie par $\Pi_T(t) = 1$ pour $\dfrac{-T}{2} \leq t \leq \dfrac{T}{2}$ et $\Pi_T(t) = 0$ sinon (avec $T > 0$).

a) Remarquons que x et $x\pi$ sont sommables sur $\mathbb{R}$ ce qui justifie l'existence des transformées de Fourier et l'utilisation de la propriété de dérivation selon ν :
Pour $\nu \neq 0$:

$$\mathcal{F}(x\Pi)(\nu) = \frac{-1}{2i\pi}(\mathcal{F}\Pi)'(\nu) = \frac{-1}{2i\pi}\left(\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\right)' = \frac{-\pi\nu\cos(\pi\nu)+\sin(\pi\nu)}{2i\pi^2\nu^2}$$

Pour $\nu = 0$:

$$\mathcal{F}(x\Pi)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\Pi(x)dx = \int_{-1/2}^{1/2} xdx = 0$$

.
b) $\Lambda = \Pi * \Pi$ est sommable car c'est le produit de convolution de deux fonctions sommables, on peut utiliser la propriété de convolution temporelle :

$$\mathcal{F}\Lambda(\nu) = (\mathcal{F}\Pi(\nu))^2 = \left(\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\right)^2$$

c) $x\Lambda$ est sommable car non nulle uniquement sur $[-1;1]$ et définie continue.
Comme dans la question a) on utilise la propriété de dérivation selon ν :
Pour $\nu \neq 0$:

$$\mathcal{F}(x\Lambda)(\nu) = \frac{-1}{2i\pi}\left(\mathcal{F}\lambda\right)'(\nu) = \frac{-1}{i\pi^3\nu^3}\sin(\pi\nu)(\pi\nu\cos(\pi\nu)-\sin(\pi\nu))$$

Pour $\nu = 0$ on trouve 0 en écrivant l'intégrale.

d) La fonction causale $te^{-t}H(t)$ est sommable sur $\mathbb{R}$ et on utilise encore la propriété de dérivation selon ν pour calculer sa transformée, on trouve $\mathcal{F}(te^{-t}H(t)) = \dfrac{1}{(1+2i\pi\nu)^2}$.

e) On a $g(t) = \dfrac{1}{t^2+2at+b^2} = \dfrac{1}{(t+a)^2+b^2-a^2} = \dfrac{1}{u^2+\alpha^2}$ avec $u = t+a$ et $\alpha = \sqrt{b^2-a^2}$ et c'est une fonction sommable sur $\mathbb{R}$.
Posons $f(u) = \dfrac{1}{u^2+\alpha^2}$, elle fait partie des fonctions usuelles dont on connait la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}f(\nu) = \frac{\pi}{\alpha}e^{-2\pi\alpha|\nu|}$$

On applique ensuite la propriété de décalage temporel avec $t_0 = -a$:

$$\mathcal{F}g(\nu) = e^{2i\pi\nu a}\frac{\pi}{\alpha}e^{-2\pi\alpha|\nu|}$$

f) Soit $f(t) = e^{-at^2+bt}$, comme $a > 0$ on voit que f est sommable.
Par ailleurs, $-at^2 + bt = -a(t - \frac{b}{2a})^2 + \frac{b^2}{4a}$, donc $f(t) = e^{\frac{b^2}{4a}} e^{-au^2}$ avec $u = t - \frac{b}{2a}$. Comme pour la question e), on combine une transformée usuelle avec la propriété de décalage temporel et on trouve :

$$\mathcal{F}f(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}} e^{\frac{-\pi^2\nu^2}{a}} e^{\frac{-i\pi b\nu}{a}}$$

g) Cette fonction n'est pas sommable sur $\mathbb{R}$ car son module est équivalent à $1/|t|$.

h) Il s'agit de la fonction porte de période T à comparer avec la fonction porte Π de référence qui est de période 1. On a $\Pi_T(t) = \Pi(Tt)$, ainsi en combinant la propriété de changement d'échelle avec la transformée usuelle de Π on trouve :

$$\mathcal{F}\Pi_T(\nu) = \frac{1}{T}\mathcal{F}\Pi\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{1}{\pi\nu}\sin\left(\frac{\pi\nu}{T}\right)$$