

Transformée de Fourier, exercice 4

Montrer que toutes les fonctions f réelles paires sommables admettent des transformées de Fourier réelles paires vérifiant de plus $\mathcal{F}f = \mathcal{F}^{-1}f$.

Soit $f(x) = e^{-a|x|}$ avec $a > 0$, calculer $\mathcal{F}f(\nu)$.

Soit f une fonction paire et sommable sur $\mathbb{R}$, soit $\nu \in \mathbb{R}$. je calcule :

$$\mathcal{F}f(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\nu t} dt$$

On peut effectuer le changement de variable affine $x = -t$ dans cette intégrale impropre convergente et on trouve :

$$\mathcal{F}f(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)e^{2i\pi\nu x} dx \quad \text{par parité de } f \quad = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{2i\pi\nu x} dx = \mathcal{F}^{-1}f(\nu)$$

Par ailleurs :

$$\mathcal{F}f(-\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{2i\pi\nu t} dt = \mathcal{F}^{-1}f(\nu) = \mathcal{F}f(\nu)$$

ainsi la transformée de Fourier d'une fonction sommable paire est aussi une fonction paire.

Observons cela sur la fonction $f(x) = e^{-a|x|}$ avec $a > 0$. C'est une fonction sommable sur $\mathbb{R}$ et paire, on va calculer sa transformée de Fourier et on s'attend à trouver une fonction paire. Soit $\nu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}e^{-2i\pi\nu t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{a-2i\pi\nu t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-a-2i\pi\nu t} dt \\ &= \frac{1}{a-2i\pi\nu} [e^{at}e^{-2i\pi\nu t}]_{-\infty}^0 - \frac{1}{a+2i\pi\nu} [e^{-at}e^{-2i\pi\nu t}]_0^{+\infty} \end{aligned}$$

Or $a > 0$, donc $e^{at}e^{-2i\pi\nu t}$ est le produit d'une fonction qui tend vers 0 en $-\infty$ par une fonction de module 1 fatalement bornée et de même $e^{-at}e^{-2i\pi\nu t}$ est le produit d'une fonction qui tend vers 0 en $+\infty$ par une fonction de module 1, on obtient ainsi :

$$\mathcal{F}f(\nu) = \frac{1}{a-2i\pi\nu} - \frac{1}{a+2i\pi\nu} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}$$