# Preuve de la pté

Soient $f$, $g$ continues par morceaux sur $\mathbb{R}$

Alors, sous réserve d'existence, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé on a :

$$(Hf * Hg)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} Hf(t)\, Hg(x-t)\, dt$$

Or $Hg(x-t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > x \\ g(x-t) & \text{si } t \leq x \end{cases}$

Ainsi : $(Hf * Hg)(x) = \int_{-\infty}^{x} Hf(t)\, g(x-t)\, dt$

Comme $Hf(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ f(t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$ on a donc :

$$(Hf * Hg)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On reconnait $(Hf * Hg)(x) = H(x) \int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt$

ce qui prouve l'existence puisqu'on obtient une intégrale ordinaire.